

# 衝撃によるカム従動節の振動について

奥 田 薫\*・和 田 金 作\*\*

## Vibration of Cam Follower caused by Impulsive Forces

Kaoru OKUDA Kinsaku WADA

(Received Oct. 9, 1967)

It is a well-known fact that minute irregularities of the surface of a rotating cam give its follower impulsive forces, which cause the vibration of the follower.

The equation of vibration is obtained by assuming that a force of the form of unit step function is applied to the cam. The relationship of the amplitude of vibration to the number of r. p. m. is investigated. Comparison is made between theoretical values of amplitude and experimental ones.

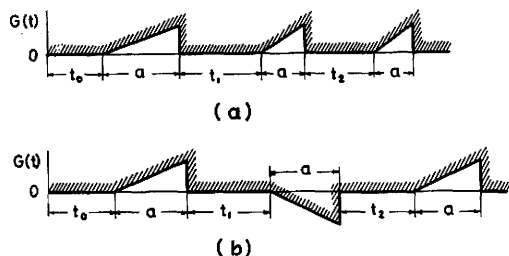
### 1 緒 言

回転するカムに微小な突部があつてこれがために、カムに接する従動節に衝撃を与える場合の振動状態を研究したものである。

この場合、カムにステップ関数に加えられて、衝撃をおこすものと仮定して振動式を求め、実験値と振巾を比較検討し、回転数の増加に対して振巾がいかに変化するかを調べた。

### 2 カム上に不連続部分が存在するためにおこると思われる関数

この論文では、回転するカムの表面に切削によるもの、あるいは回転中の衝撃により、不連続部分が生じたためにおこる、カム従動節の振動の変化を研究するのが目的であり、カムに生ずる可能なステップ関数は次のようなものと考えられる。



図一 鋸歯形ステップ曲線

#### (A) 鋸歯形ステップ関数

直角座標  $X-Y$  上において  $X$  軸に時間を取り、 $Y$  軸にステップ関数  $G(t)$  をとると、鋸歯型関数は  $G(t)=1$ 、時間  $t=a$  なる三角形の集合とみなす、この場合 1 個の三角形のステップ関数は (a) 図の場合 次のようになる。

$$G(t) = \frac{1}{a}(t-t_0)U(t-t_0) - \frac{1}{a}(t-a-t_0)U(t-a-t_0) - U(t-t_0-a)$$

この式のラプラス変換値は

$$\begin{aligned} L[G(t)] &= \frac{1}{a} \int_0^\infty U(t-t_0)U(t-t_0-a)e^{-st} dt \\ &\quad - \frac{1}{a} \int_0^\infty (t-a-t_0)U(t-a-t_0) \cdot e^{-st} dt - \int_0^\infty U(t-t_0-a)e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{t_0}^\infty (t-t_0)e^{-st} dt - \frac{1}{a} \int_{t_0+a}^\infty (t-a-t_0)e^{-st} dt - \int_{t_0+a}^\infty e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{as^2} e^{-st_0} - \frac{1}{as^2} e^{-s(t_0+a)} - \frac{1}{s} e^{-s(t_0+a)} \end{aligned}$$

となる。(a)図のように鋸歯 3 個を有する形状のラプラス変換は

$$\begin{aligned}
 L[G(t)] = & \frac{1}{as^2} e^{-st_0} - \frac{1}{as^2} e^{-s(t_0+a)} \\
 & - \frac{1}{s} e^{-s(t_0+a)} + \frac{1}{as^2} e^{-s(t_0+a+t_1)} \\
 & - \frac{1}{as^2} e^{-s(t_0+t_1+2a)} \\
 & - \frac{1}{s} e^{-s(t_0+t_1+2a)} \\
 & + \frac{1}{as^2} e^{-s(t_0+t_1+t_2+2a)} \\
 & - \frac{1}{as^2} e^{-s(t_0+t_1+t_2+3a)} \\
 & - \frac{1}{s} e^{-s(t_0+t_1+t_2+3a)}
 \end{aligned}$$

また、b)図のような場合は次式で示される。

$$\begin{aligned}
 L[G(t)] = & \frac{1}{as^2} e^{-st_0} - \frac{1}{as^2} e^{-s(t_0+a)} \\
 & - \frac{1}{s} e^{-s(t_0+a)} - \frac{1}{as^2} e^{-s(t_0+t_1+2a)} \\
 & + \frac{1}{as^2} e^{-s(t_0+t_1+2a)} \\
 & + \frac{1}{s} e^{-s(t_0+t_1+2a)} \\
 & + \frac{1}{as^2} e^{-s(t_0+t_1+t_2+2a)} \\
 & - \frac{1}{as^2} e^{-s(t_0+t_1+t_2+3a)} \\
 & - \frac{1}{s} e^{-s(t_0+t_1+t_2+3a)}
 \end{aligned}$$

### (B) 三角形ステップ関数

三角形 1 個のステップ関数は次のようになる。

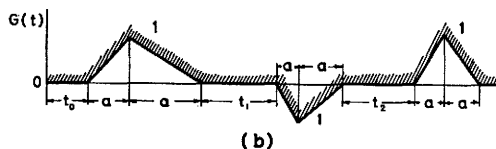
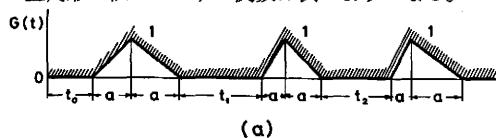


図-2 三角形ステップ曲線

$$\begin{aligned}
 G(t) = & \frac{1}{a} (t-t_0) U(t-t_0-a) - \frac{2}{a} (t-t_0-a) \cdot \\
 & U(t-t_0-a) + \frac{1}{a} (t-t_0-2a) U(t-t_0-2a)
 \end{aligned}$$

したがってこのラプラス変換値は

$$\begin{aligned}
 L[G(t)] = & \frac{1}{a} \int_0^\infty (t-t_0) U(t-t_0) e^{-st} dt \\
 & - \frac{2}{a} \int_0^\infty (t-t_0-a) U(t-t_0-a)
 \end{aligned}$$

$$e^{-st} dt + \frac{1}{a} \int_0^\infty (t-t_0-2a) U(t-t_0-2a) e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned}
 & U(t-t_0-2a) e^{-st} dt \\
 = & \frac{1}{a} \int_{t_0}^\infty (t-t_0) e^{-st} dt - \frac{2}{a} \\
 & \int_{t_0+a}^\infty (t-t_0-a) e^{-st} dt + \frac{1}{a} \\
 & \int_{t_0+2a}^\infty (t-t_0-2a) e^{-st} dt \\
 = & \frac{1}{as^2} e^{-t_0 s} - \frac{2}{as^2} e^{-(t_0+a)s} \\
 & + \frac{1}{as^2} e^{-(t_0+2a)s} \\
 = & \frac{1}{as^2} e^{-t_0 s} \cdot (1 - e^{-as})^2
 \end{aligned}$$

したがって(a)図のように n 個の三角形のラプラス変換値は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 L[G(t)] = & \frac{1}{as^2} e^{-t_0 s} \cdot (1 - e^{-as})^2 \\
 & + \frac{1}{as^2} e^{-(t_0+t_1+2a)s} \cdot (1 - e^{-as})^2 \\
 & + \frac{1}{as^2} e^{-(t_0+t_1+t_2+4a)s} \cdot (1 - e^{-as})^2 \\
 & + \dots + \frac{1}{as^2} e^{-(t_0+t_1+t_2+\dots+t_{n-1}+(n-1)2a)s} \cdot (1 - e^{-as})^2
 \end{aligned}$$

となり(b)図の場合は

$$\begin{aligned}
 L[G(t)] = & \frac{1}{as^2} e^{-t_0 s} \cdot (1 - e^{-as})^2 \\
 & - \frac{1}{as^2} e^{-(t_0+t_1+2a)s} \cdot (1 - e^{-as})^2 \\
 & + \frac{1}{as^2} e^{-(t_0+t_1+t_2+4a)s} \cdot (1 - e^{-as})^2 \\
 & - \dots \pm \frac{1}{as^2} e^{-(t_0+t_1+t_2+\dots+t_{n-1}+(n-1)2a)s} \cdot (1 - e^{-as})^2
 \end{aligned}$$

### (C) 梯形ステップ関数

この梯形ステップ関数 1 個の場合は次のようになる。

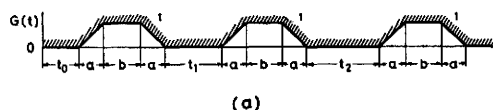
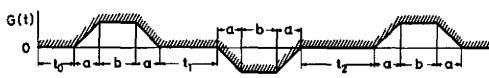


図-3 (a) 梯形ステップ曲線

$$\begin{aligned}
 G(t) = & \frac{1}{a} (t-t_0) U(t-t_0) - \frac{1}{a} (t-t_0-a) U(t-t_0-a) \\
 & - \frac{1}{a} (t-t_0-a-b) U(t-t_0-a-b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a}(t-t_0-2a-b)U(t-t_0-2a-b) \\
\therefore L[G(t)] &= \frac{1}{a} \left[ \int_{t_0}^{\infty} (t-t_0)e^{-st} dt - \int_{t_0+a}^{\infty} (t-t_0-a)e^{-st} dt \right. \\
& \quad \left. - \int_{t_0+a+b}^{\infty} (t-t_0-a-b)e^{-st} dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{t+2a+b}^{\infty} (t-t_0-2a-b)e^{-st} dt \right] \\
&= \frac{1}{as^2} \left[ e^{-st_0} - e^{-(t_0+a)s} - e^{-(t_0+a+b)s} \right. \\
& \quad \left. + e^{-(t_0+2a+b)s} \right]
\end{aligned}$$


(b)

図-3 (b) 梯形ステップ曲線

一般に(a), (b)図のような梯形ステップ関数は

$$\begin{aligned}
L[G(t)] &= \frac{1}{as^2} \left[ -e^{-st_0} - e^{-(t_0+a)s} \right. \\
& \quad \left. - e^{-(t_0+a+b)s} + e^{-(t_0+2a+b)s} \right] \\
& \quad + \frac{1}{as^2} \left[ e^{-(t_0+t_1+2a+b)s} \right. \\
& \quad \left. - e^{-(t_0+t_1+3a+b)s} - e^{-(t_0+t_1+3a+2b)s} \right. \\
& \quad \left. + e^{-(t_0+t_1+4a+2b)s} \right] \\
& \quad + \frac{1}{as^2} \left[ e^{-(t_0+t_1+t_2+4a+2b)s} \right. \\
& \quad \left. - e^{-(t_0+t_1+t_2+5a+2b)s} \right. \\
& \quad \left. - e^{-(t_0+t_1+t_2+5a+3b)s} \right. \\
& \quad \left. + e^{-(t_0+t_1+t_2+6a+3b)s} \right] + \dots \\
& \quad + \frac{1}{as^2} \left[ e^{-\{t_0+t_1+t_2+\dots+t_{n-1}\}s} \right. \\
& \quad \left. + 2(n-1)a + (n-1)b \right. \\
& \quad \left. - e^{-\{t_0+t_1+t_2+\dots+t_{n-1}\}s + (2n-1)a} \right. \\
& \quad \left. + (n-1)b \right] s - e^{-\{t_0+t_1+t_2+\dots+t_{n-1}\}s} \\
& \quad \left. + (2n-1)a + nb \right] s \\
& \quad \left. + e^{-\{t_0+t_1+t_2+\dots+t_{n-1}+2na+nb\}s} \right]
\end{aligned}$$

(b)図の場合は前式の第二項は負となり、同じようにして下向きの梯形欠損の時は負となる。

#### (D) 正弦形ステップ関数

正弦曲線を1個有するステップ関数を求めるには関数  $U(t-t_0)\sin(t-t_0)$ ,  $U(t-t_0-t_1)\sin(t-t_0-t_1)$ を合成すればよいから、正弦形ステップ関数は次のよう

にして求められる。

$$\begin{aligned}
G(t) &= u(t-t_0)\sin(t-t_0) \\
&= G_1(t) + G_2(t) + U(t-t_0-t_1)\sin(t-t_0-t_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ここに } G_1(t) &= 0 & t < t_0 \\
&= \sin t & t > t_0 + t_1 \\
G_2(t) &= 0 & t < t_0 + t_1 \\
&= \sin t & t > t_0 + t_1, \quad \omega = \frac{\pi}{2a}
\end{aligned}$$

この像関数は

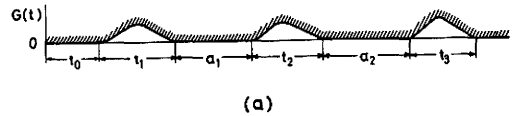


図-4 (a) 正弦形ステップ曲線

$$\begin{aligned}
L[G(t)] &= \int_0^{\infty} \sin \omega(t-t_0)U(t-t_0)e^{-st} dt \\
& \quad + \int_0^{\infty} \sin \omega(t-t_1-t_0)U(t-t_1-t_0)e^{-st} dt \\
&= \int_{t_0}^{\infty} \sin \omega(t-t_0)e^{-st} dt \\
& \quad + \int_{t_1+t_0}^{\infty} \sin \omega(t-t_1-t_0)e^{-st} dt \\
&= \frac{e^{-t_0s}}{s^2+1} + \frac{e^{-(t_1+t_0)s}}{s^2+1} \\
&= \frac{e^{-t_0s}}{s^2+1} (1 + e^{-t_1s})
\end{aligned}$$

したがってn個の正弦形ステップを有する場合は、

$$\begin{aligned}
G(t) &= U(t-t_0)\sin \omega(t-t_0) \\
& \quad + U(t - \sum_{n=0}^{n-1} t_n)\sin \omega(t - \sum_{n=0}^{n-1} t_n) \\
& \quad + U(t - \sum_{n=0}^{n-1} t_n - a_1)\sin \omega(t - \sum_{n=0}^{n-1} t_n - a_1) \\
& \quad + U(t - \sum_{n=0}^{n-2} t_n - a_1)\sin \omega(t - \sum_{n=0}^{n-2} t_n - a_1) \\
& \quad + U(t - \sum_{n=0}^{n-2} t_n - \sum_{n=1}^{n-2} a_n)\sin \omega(t - \sum_{n=0}^{n-2} t_n - \sum_{n=1}^{n-2} a_n) \\
& \quad - \sum_{n=1}^{n-2} a_n + U(t - \sum_{n=0}^{n-2} t_n - \sum_{n=1}^{n-2} a_n)\sin \omega(t - \sum_{n=0}^{n-2} t_n - \sum_{n=1}^{n-2} a_n) \\
& \quad - \sum_{n=1}^{n-2} a_n + \dots + U(t - \sum_{n=0}^{n-1} t_n - \sum_{n=1}^{n-1} a_n)\sin \omega(t - \sum_{n=0}^{n-1} t_n - \sum_{n=1}^{n-1} a_n) \\
& \quad - \sum_{n=1}^{n-1} t_n - \sum_{n=1}^{n-1} a_n + U(t - \sum_{n=0}^{n-1} t_n - \sum_{n=1}^{n-1} a_n)\sin \omega(t - \sum_{n=0}^{n-1} t_n - \sum_{n=1}^{n-1} a_n)
\end{aligned}$$

$$(t - \sum_{n=0}^n t_n - \sum_{n=1}^n a_n)$$

したがって、この像関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} L[G(t)] &= \frac{e^{-t_0 s}}{s^2 + 1} (1 + e^{-t_1 s}) \\ &+ \frac{1}{s^2 + 1} e^{-\left(\sum_{n=0}^{n=1} t_n + a_1\right)s} \\ &\cdot \left\{ 1 + e^{-\left(\sum_{n=0}^{n=2} t_n + a_1\right)s} \right\} \\ &+ \frac{1}{s^2 + 1} e^{-\left(\sum_{n=0}^{n=2} t_n + \sum_{n=1}^{n=2} a_n\right)s} \\ &\cdot \left\{ 1 + e^{-\left(\sum_{n=0}^{n=3} t_n + \sum_{n=1}^{n=2} a_n\right)s} \right\} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{s^2 + 1} e^{-\left(\sum_{n=0}^{n-1} t_n + \sum_{n=1}^{n-1} a_n\right)s} \\ &\cdot \left\{ 1 + e^{-\left(\sum_{n=1}^n t_n + \sum_{n=1}^{n-1} a_n\right)s} \right\} \end{aligned}$$

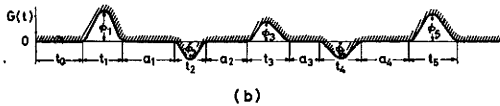


図-4 (b) 正弦形ステップ曲線

また、ステップの高さおよび時間の異なる正弦ステップ像関数は次式で示される。

$$\begin{aligned} L[G(t)] &= \varphi_1 \frac{1}{s^2 + 1} e^{-t_0 s} \cdot (1 + e^{-t_1 s}) \\ &- \varphi_2 \frac{1}{s^2 + 1} e^{-\left(\sum_{n=0}^{n=1} t_n + a_1\right)s} \\ &\cdot \left\{ 1 + e^{-\left(\sum_{n=0}^{n=2} t_n + a_1\right)s} \right\} \\ &+ \varphi_3 \frac{1}{s^2 + 1} e^{-\left(\sum_{n=0}^{n=2} t_n + \sum_{n=1}^{n=2} a_n\right)s} \\ &\cdot \left\{ 1 + e^{-\left(\sum_{n=1}^{n=3} t_n + \sum_{n=1}^{n=2} a_n\right)s} \right\} + \dots \\ &\pm \varphi_n \frac{1}{s^2 + 1} e^{-\left(\sum_{n=0}^{n-1} t_n + \sum_{n=1}^{n-1} a_n\right)s} \\ &\cdot \left\{ 1 + e^{-\left(\sum_{n=1}^n t_n + \sum_{n=1}^{n-1} a_n\right)s} \right\} \end{aligned}$$

(E) 正弦、余弦形ステップ関数

種々の形のステップ形を示し、いまステップ関数  $U(t)$ 、その像関数を  $G(t)$  とすれば、次のようになる。

ここに  $\omega = \frac{\pi}{2a}$  である。

$$U(t_1) = \varphi_1 U(t - t_0) \cos \omega(t - t_0)$$

$$\begin{aligned} &+ \varphi_1 U(t - t_0 - a) \sin \omega(t - t_0 - a) \\ &+ \varphi_2 U(t - t_0 - a - t_1) \sin \omega(t - t_0 - a - t_1) \\ &- \varphi_2 U(t - t_0 - a - t_1 - b) \cos \omega(t - t_0 - a - t_1 - b) \end{aligned}$$

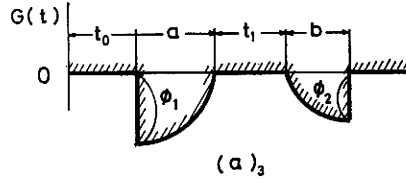
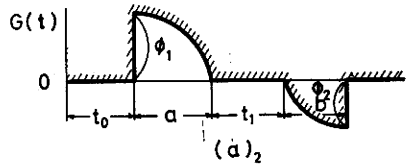
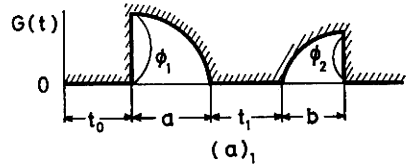


図-5 (a) 正弦、余弦形曲線

$$\begin{aligned} G(t_1) &= \frac{\varphi_1}{s^2 + 1} \left\{ e^{-t_0 s} + e^{-(t_0 + a)s} \right\} \\ &+ \frac{\varphi_2}{s^2 + 1} \left\{ e^{-(t_0 + a + t_1)s} \right. \\ &\left. - e^{-(t_0 + a + t_1 + b)s} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(t_2) &= \varphi_1 U(t - t_0) \cos \omega(t - t_0) \\ &+ \varphi_1 U(t - t_0 - a) \sin \omega(t - t_0 - a) \\ &- \varphi_2 U(t - t_0 - a - t_1) \cos \omega(t - t_0 - a - t_1) \\ &- \varphi_2 U(t - t_0 - a - t_1 - b) \sin \omega(t - t_0 - a - t_1 - b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(t_2) &= \frac{\varphi_1}{s^2 + 1} \left\{ e^{-t_0 s} + e^{-(t_0 + a)s} \right\} \\ &- \frac{\varphi_2}{s^2 + 1} \left\{ e^{-(t_0 + a + t_1)s} \right. \\ &\left. + e^{-(t_0 + a + t_1 + b)s} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(t_3) &= -\varphi_1 U(t - t_0) \cos \omega(t - t_0) \\ &- \varphi_1 U(t - t_0 - a) \sin \omega(t - t_0 - a) \\ &- \varphi_2 U(t - t_0 - a - t_1) \sin \omega(t - t_0 - a - t_1) \\ &+ \varphi_2 U(t - t_0 - a - t_1 + b) \cos \omega(t - t_0 - a - t_1 + b) \end{aligned}$$

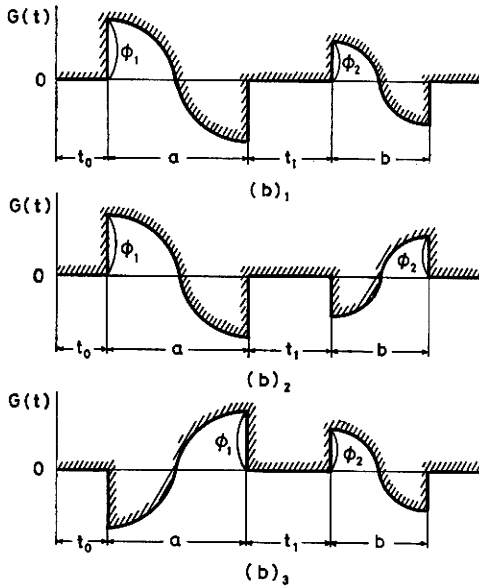
$$G(t_3) = -\frac{\varphi_1}{s^2 + 1} \left\{ e^{-t_0 s} + e^{-(t_0 + a)s} \right\}$$

$$-\frac{\varphi_2}{s^2+1} \left\{ e^{-(t_0+a+t_1)s} - e^{-(t_0+a+t_1+b)s} \right\}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{a}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{b}$$

$$\begin{aligned} U(t_1) = & \varphi_1 U(t-t_0) \cos \omega_1(t-t_0) \\ & + \varphi_1 U(t-t_0-a) \cos \omega_1(t-t_0-a) \\ & + \varphi_2 U(t-t_0-a-t_1) \cos \omega_2(t-t_0-a-t_1) \\ & + \varphi_2 U(t-t_0-a-t_1-b) \cos \omega_2(t-t_0-a-t_1-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(t_1) = & \varphi_1 \frac{1}{s^2+1} \left\{ e^{-t_0 s} + e^{-(t_0+a)s} \right\} \\ & + \varphi_2 \frac{1}{s^2+1} \left\{ e^{-(t_0+a+t_1)s} + e^{-(t_0+a+t_1+b)s} \right\} \end{aligned}$$



图—5 (b) 正弦, 余弦形曲线

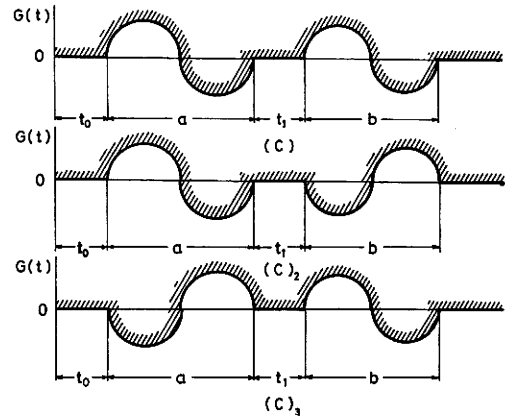
$$\begin{aligned} U(t_2) = & \varphi_1 U(t-t_0) \cos \omega_1(t-t_0) \\ & + \varphi_1 U(t-t_0-a) \cos \omega_1(t-t_0-a) \\ & - \varphi_2 U(t-t_0-a-t_1) \cos \omega_1(t-t_0-a-t_1) \\ & - \varphi_2 U(t-t_0-a-t_1-b) \cos \omega_2(t-t_0-a-t_1-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(t_2) = & \varphi_1 \frac{1}{s^2+1} \left\{ e^{-t_0 s} + e^{-(t_0+a)s} \right\} \\ & - \varphi_2 \frac{1}{s^2+1} \left\{ e^{-(t_0+a+t_1)s} + e^{-(t_0+a+t_1+b)s} \right\} \end{aligned}$$

$$U_1(t_2) = -\varphi_1 U(t-t_0) \cos \omega_1(t-t_0)$$

$$\begin{aligned} & -\varphi_1 U(t-t_0-a) \cos \omega_1(t-t_0-a) \\ & + \varphi_2 U(t-t_0-a-t_1) \cos \omega_2(t-t_0-a-t_1) \\ & + \varphi_2 U(t-t_0-a-t_1-b) \cos \omega_2(t-t_0-a-t_1-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(t_2) = & -\varphi_1 \frac{1}{s^2+1} \left\{ e^{-t_0 s} + e^{-(t_0+a)s} \right\} \\ & + \varphi_2 \frac{1}{s^2+1} \left\{ e^{-(t_0+a+t_1)s} + e^{-(t_0+a+t_1+b)s} \right\} \end{aligned}$$



图—5 (c) 正弦, 余弦形曲线

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{a}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{b}$$

$$\begin{aligned} U(t_1) = & \varphi_1 U(t-t_0) \sin \omega_1(t-t_0) \\ & - \varphi_1 U(t-t_0-a) \sin \omega_1(t-t_0-a) \\ & + \varphi_2 U(t-t_0-a-t_1) \sin \omega_2(t-t_0-a-t_1) \\ & - \varphi_2 U(t-t_0-a-t_1-b) \sin \omega_2(t-t_0-a-t_1-b) \end{aligned}$$

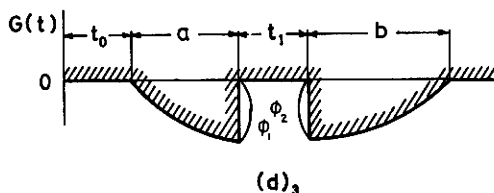
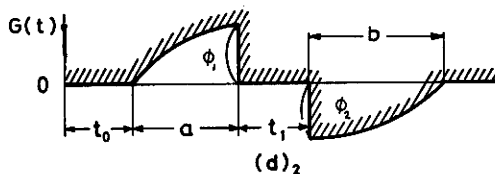
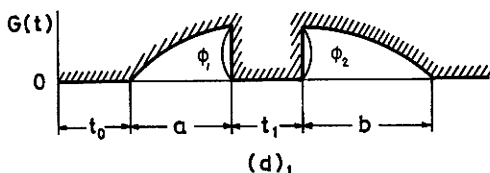
$$\begin{aligned} G(t_1) = & \frac{\varphi_1}{s^2+1} \left\{ e^{-t_0 s} - e^{-(t_0+a)s} \right\} \\ & + \frac{\varphi_2}{s^2+1} \left\{ e^{-(t_0+a+t_1)s} - e^{-(t_0+a+t_1+b)s} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(t_2) = & \varphi_1 U(t-t_0) \sin \omega_1(t-t_0) \\ & - \varphi_1 U(t-t_0-a) \sin \omega_1(t-t_0-a) \\ & - \varphi_2 U(t-t_0-a-t_1) \sin \omega_2(t-t_0-a-t_1) \\ & + \varphi_2 U(t-t_0-a-t_1-b) \cos \omega_2(t-t_0-a-t_1-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(t_2) = & \frac{\varphi_1}{s^2+1} \left\{ e^{-t_0 s} - e^{-(t_0+a)s} \right\} \\ & - \frac{\varphi_2}{s^2+1} \left\{ e^{-(t_0+a+t_1)s} - e^{-(t_0+a+t_1+b)s} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(t_2) = & -\varphi_1 U(t-t_0) \sin \omega_1(t-t_0) \\
 & +\varphi_1 U(t-t_0-a) \sin \omega_1(t-t_0-a) \\
 & +\varphi_2 U(t-t_0-a-t_1) \sin \omega_2(t-t_0-a-t_1) \\
 & -\varphi_2 U(t-t_0-a-t_1-b) \sin \omega_2(t-t_0-a \\
 & -t_1-b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(t_2) = & -\frac{\varphi_1}{s^2+1} \left\{ e^{-t_0 s} + e^{-(t_0+a)s} \right\} \\
 & +\frac{\varphi_2}{s^2+1} \left\{ e^{-(t_0+a+t_1)s} \right. \\
 & \left. - e^{-(t_0+a+t_1+b)s} \right\}
 \end{aligned}$$



図—5 (d) 正弦, 余弦形曲線

$$\text{ここに } \omega_1 = \frac{\pi}{2a}, \quad \omega_2 = \frac{\pi}{2b}$$

$$\begin{aligned}
 U(t_1) = & \varphi_1 U(t-t_0) \sin \omega_1(t-t_0) \\
 & -\varphi_1 U(t-t_0-a) \cos \omega_1(t-t_0-a) \\
 & +\varphi_2 U(t-t_0-a-t_1) \cos \omega_2(t-t_0-a-t_1) \\
 & +\varphi_2 U(t-t_0-a-t_1-b) \cos \omega_2(t-t_0-a \\
 & -t_1-b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(t_1) = & \frac{\varphi_1}{s^2+1} \left\{ e^{-t_0 s} - e^{-(t_0+a)s} \right\} \\
 & +\frac{\varphi_2}{s^2+1} \left\{ e^{-(t_0+a+t_1)s} \right. \\
 & \left. + e^{-(t_0+a+t_1+b)s} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(t_2) = & \varphi_1 U(t-t_0) \sin \omega_1(t-t_0) \\
 & -\varphi_1 U(t-t_0-a) \cos \omega_1(t-t_0-a-t_1) \\
 & -\varphi_2 U(t-t_0-a-t_1) \cos \omega_2(t-t_0-a-t_1) \\
 & -\varphi_2 U(t-t_0-a-t_1-b) \cos \omega_2(t-t_0-a \\
 & -t_1-b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(t_2) = & \frac{\varphi_1}{s^2+1} \left\{ e^{-t_0 s} - e^{-(t_0+a)s} \right\} \\
 & -\frac{\varphi_2}{s^2+1} \left\{ e^{-(t_0+a+t_1)s} \right. \\
 & \left. + e^{-(t_0+a+t_1+b)s} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(t_2) = & -\varphi_1 U(t-t_0) \sin \omega_1(t-t_0) \\
 & +\varphi_1 U(t-t_0-a) \cos \omega_1(t-t_0-a) \\
 & -\varphi_2 U(t-t_0-a-t_1) \cos \omega_2(t-t_0-a-t_1) \\
 & -\varphi_2 U(t-t_0-a-t_1-b) \sin \omega_2(t-t_0-a \\
 & -t_1-b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(t_2) = & -\frac{\varphi_1}{s^2+1} \left\{ e^{-t_0 s} + e^{-(t_0+a)s} \right\} \\
 & -\frac{\varphi_2}{s^2+1} \left\{ e^{-(t_0+a+t_1)s} \right. \\
 & \left. + e^{-(t_0+a+t_1+b)s} \right\}
 \end{aligned}$$

### 3 歯車駆動二重偏心カムにおける不定常振動

この場合, カムに欠部を作り, カムの種々の回転における場合の振動状態を調べたもので, 鋸歯形のステップ現象がおけると仮定して微分方程式を作ると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 m\ddot{y} + \mu\dot{y} + (K+K_s)y = & \varphi_1 \left[ \frac{(t-t_0)}{a} U(t-t_0) \right. \\
 & \left. - \frac{(t-a-t_0)}{a} U(t-a-t_0) - U(t-t_0-a) \right]
 \end{aligned}$$

ここに  $\mu \text{ kg} \cdot \text{sec/cm}$  はフレームとリンケージの間の減衰係数,  $K, K_s$  はスプリング定数である。

$$\text{いま, } \frac{\mu}{m} = 2\epsilon, \quad \frac{K+K_s}{m} = p^2, \quad \frac{\varphi_1}{m} = \varphi$$

とおくと

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} + 2\epsilon\dot{y} + p^2y = & \varphi \left[ \frac{(t-t_0)}{a} U(t-t_0) - \frac{(t-a-t_0)}{a} \right. \\
 & \left. U(t-a-t_0) - U(t-t_0-a) \right] \quad \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

この像関数を求めると

$$\begin{aligned}
 s^2 L[U] - sF(0) - F'(0) - F(0) + 2\epsilon \{sL[U] \\
 - F(0)\} + p^2 L[U] = & \varphi \left[ \frac{1}{as^2} e^{-st_0} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{as^2} e^{-s(t_0+a)} - \frac{1}{s} e^{-s(t_0+a)} \right] \\
 \therefore L[U] \{s^2 + 2\epsilon s + p^2\} = & (s+1+2\epsilon)F(0) - F'(0) \\
 = & \varphi \left[ \frac{1}{as^2} e^{-st_0} - \frac{1}{as^2} e^{-s(t_0+a)} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{s} e^{-s(t_0+a)} \right] \\
 \therefore L[U] = & \frac{(s+1+2\epsilon)F(0)}{s^2+2\epsilon s+p^2} + \frac{F'(0)}{s^2+2\epsilon s+p^2} \\
 & + \frac{\varphi}{a} \cdot \frac{1}{s^2(s^2+2\epsilon s+p^2)} e^{-st_0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\varphi}{a} \cdot \frac{1}{(s^2 + 2\epsilon s + p^2)} e^{-s(t_0 - a)} \\
& -\varphi \frac{1}{s(s^2 + 2\epsilon s + p^2)} e^{-s(t_0 + a)} \\
G_1(i\omega) &= \frac{s}{s^2 + 2\epsilon s + p^2} = \frac{(s + \epsilon)}{(s + \epsilon)^2 + (p^2 - \epsilon^2)} \\
& -\frac{\epsilon}{(s + \epsilon)^2 + (p^2 - \epsilon^2)} \\
G_2(i\omega) &= \frac{1}{s^2 + 2\epsilon s + p^2} = -\frac{2\epsilon}{p^4} \cdot \frac{1}{s} \\
& + \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{2\epsilon}{p^4} \cdot \frac{s + \epsilon}{(s + \epsilon)^2 + (p^2 - \epsilon^2)} \\
& + \frac{2\epsilon^2 - p^2}{p^4} \cdot \frac{1}{(s + \epsilon)^2 + (p^2 - \epsilon^2)} \\
G_3(i\omega) &= \frac{1}{s(s^2 + 2\epsilon s + p^2)} = \frac{1}{p^2} \left[ \frac{1}{s} \right. \\
& - \frac{s}{(s + \epsilon)^2 + (p^2 - \epsilon^2)} \\
& \left. - \frac{2\epsilon}{(s + \epsilon)^2 + (p^2 - \epsilon^2)} \right] \\
y &= L^{-1}L[U] = \left\{ e^{-\epsilon t} \cos \sqrt{p^2 - \epsilon^2} t \right. \\
& + \frac{(1 + 2\epsilon)^{-\epsilon t}}{\sqrt{p^2 - \epsilon^2}} \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} t \Big\} F(0) \\
& + F'(0) \frac{1}{\sqrt{p^2 - \epsilon^2}} \cdot e^{-\epsilon t} \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cdot t \\
& + \frac{\varphi}{a} \left[ -\frac{2\epsilon}{p^4} U(t - t_0) + \frac{1}{p^2} (t - t_0) U(t - t_0) \right. \\
& + \frac{2\epsilon}{p^4} U(t - t_0) \cos \sqrt{p^2 - \epsilon^2} (t - t_0) \\
& + \frac{2\epsilon^2 - p^2}{p^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 - \epsilon^2}} U(t - t_0) \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \\
& \left. (t - t_0) \right] - \frac{\varphi}{a} \left[ -\frac{2\epsilon}{p^2} U(t - t_0 - a) \right. \\
& + \frac{1}{p^2} (t - t_0 - a) U(t - t_0 - a) \\
& + \frac{2\epsilon}{p^4} U(t - t_0 - a) \cos \sqrt{p^2 - \epsilon^2} (t - t_0 - a) \\
& + \frac{2\epsilon^2 - p^2}{p^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 - \epsilon^2}} U(t - t_0 - a) \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \\
& \left. (t - t_0 - a) \right] - \frac{\varphi}{p^2} \left[ U(t - t_0 - a) \right. \\
& - U(t - t_0 - a) \cos \sqrt{p^2 - \epsilon^2} (t - t_0 - a) \\
& \left. - \frac{\epsilon}{\sqrt{p^2 - \epsilon^2}} U(t - t_0 - a) \cdot \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \right. \\
& \left. (t - t_0 - a) \right]
\end{aligned}$$

カムの振動方程式は

$$\begin{aligned}
m\ddot{y} + \mu\dot{y} + (K + K_s)y + s_1 &= Ky_c \\
&= K(r_1(1 - \cos \omega t) + r_2(1 - \cos 2\omega t))
\end{aligned}$$

である。ここに  $s_1$  はカム機構に加えたばね力であり、

$r_1, r_2$  は第一次偏心、および第二次偏心カムの半径  
 $\omega$  は回転角速度である。

$$\frac{kr_1}{m} = f_1, \quad \frac{kr_2}{m} = f_2, \quad \frac{s_1}{m} = r \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y} + 2\epsilon\dot{y} + p^2y &= f_1(1 - \cos \omega t) + f_2(1 - \cos 2\omega t) \\
&- r \quad \dots\dots\dots(2)
\end{aligned}$$

この場合は  $x = 0$  のとき  $y = 0, y' = 0$  なる初期条件を有するとして、この式の像関数を求めると、

$$\begin{aligned}
L[U](s^2 + 2\epsilon s + p^2) &= f_1 \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \\
&+ f_2 \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4\omega^2} \right) - \frac{r}{s} \\
\therefore L[U] &= f_1 \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 2\epsilon s + p^2)} \right. \\
&- \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 2\epsilon s + p^2)} \Big\} \\
&+ f_2 \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 2\epsilon s + p^2)} - \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 2\epsilon s + p^2)} \right\} \\
&- \frac{r}{s(s^2 + 2\epsilon s + p^2)}
\end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
G_1(i\omega) &= \frac{1}{s(s^2 + 2\epsilon s + p^2)} = \frac{1}{p^2} \left[ \frac{1}{s} \right. \\
&- \frac{s}{(s + \epsilon)^2 + (p^2 - \epsilon^2)} - \frac{2\epsilon}{(s + \epsilon)^2 + (p^2 - \epsilon^2)} \Big] \\
G_2(i\omega) &= \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 2\epsilon s + p^2)} \\
&= \frac{1}{(\omega^2 - p^2) + 4\epsilon^2\omega^2} \left[ (p^2 - \omega^2) \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right. \\
&+ \frac{2\epsilon\omega^2}{s^2 + \omega^2} + (\omega^2 - p^2) \frac{s}{(s + \epsilon)^2 + (p^2 - \epsilon^2)} \\
&- 2\epsilon p^2 \cdot \frac{1}{(s + \epsilon)^2 + (p^2 - \epsilon^2)} \Big] \\
G_3(i\omega) &= \frac{1}{(4\omega^2 - p^2) + 16\epsilon^2\omega^2} \left[ (p^2 - 4\omega^2) \right. \\
&\cdot \frac{s}{s^2 + 4\omega^2} + \frac{4\epsilon\omega^2}{s^2 + 4\omega^2} \\
&+ (4\omega^2 - p^2) \frac{s}{(s + \epsilon)^2 + (p^2 - \epsilon^2)} \\
&- 2\epsilon p^2 \cdot \frac{1}{(s + \epsilon)^2 + (p^2 - \epsilon^2)} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore y &= F(0) = L^{-1}L[U] \\
&= f_1 L^{-1}[G_1(i\omega) - G_2(i\omega)] + f_2 L^{-1}[G_1(i\omega) \\
&- G_2(i\omega)] - r L^{-1}G_1(i\omega) \\
&= (f_1 + f_2 - r) L^{-1}G_1(i\omega) - f_1 L^{-1}G_2(i\omega) \\
&- f_2 L^{-1}G_3(i\omega) \\
&= \frac{f_1 + f_2 - r}{p^2} - e^{-\epsilon t} \cos \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cdot t \\
&\left\{ \frac{f_1 + f_2 - r}{p^2} + \frac{f_1(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2\omega^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f_2(4\omega^2 - p^2)}{(4\omega^2 - p^2 + 16\epsilon^2\omega^2)} - e^{-\epsilon t} \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cdot t \\
& \left\{ \frac{(f_1 + f_2 - r) \cdot \epsilon}{p^2 \sqrt{p^2 - \epsilon^2}} + \frac{f_1 \epsilon (\omega^2 - 3p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 \omega^2} \right. \\
& \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 - \epsilon^2}} + \frac{f_2 \epsilon^2 (4\omega^2 - 3p^2)}{(4\omega^2 - p^2) + 16\epsilon^2 \omega^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 - \epsilon^2}} \Big\} \\
& - \frac{f_1}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 \omega^2} \left\{ (p^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\epsilon \omega s \omega t \right\} \\
& - \frac{f_2}{(4\omega^2 - p^2)^2 + 16\epsilon^2 \omega^2} \left\{ (p^2 - 4\omega^2) \cos 2\omega t \right. \\
& \left. + 2\epsilon \omega s 2\omega t \right\} \\
F'(0) = & \left[ e^{-\epsilon t} \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cdot t \right. \\
& - \epsilon \cdot e^{-\epsilon t} \cos \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cdot t \Big] \left\{ \frac{f_1 + f_2 - r}{p^2} \right. \\
& + \frac{f_1(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 \omega^2} + \frac{f_2(4\omega^2 - p^2)}{(4\omega^2 - p^2)^2 + 16\epsilon^2 \omega^2} \Big\} \\
& + \frac{1}{\sqrt{p^2 - \epsilon^2}} \left[ e^{-\epsilon t} \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cos \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cdot t \right. \\
& - \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cdot \epsilon \cdot e^{-\epsilon t} \Big] \left\{ -\frac{(f_1 + f_2 - r)\epsilon}{p^2} \right. \\
& - \frac{f_1 \epsilon (\omega^2 - 3p^2)}{[(\omega^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 \omega^2]} - \frac{(4\omega^2 - p^2)\epsilon(4\omega^2 - 3p^2)}{(4\omega^2 - p^2) + 16\epsilon^2 \omega^2} \Big\} \\
& - \frac{f_1}{(\omega^2 - p^2) + 4\epsilon^2 \omega^2} [(\omega^2 - p^2) \omega \sin \omega t \\
& + 2\epsilon \omega^2 \cdot \cos \omega t] - \frac{f_2}{(4\omega^2 - p^2)^2 + 16\epsilon^2 \omega^2} \\
& \left[ (4\omega^2 - p^2) 2\omega \sin 2\omega t + 4\epsilon \omega^2 \cdot \cos 2\omega t \right]
\end{aligned}$$

正弦のステップを加えた場合は

$$\begin{aligned}
\ddot{y} + 2\epsilon \dot{y} + p^2 y &= \varphi[U(t - t_0) \sin \omega(t - t_0) \\
& + U(t - t_0 - t_1) \sin(t - t_0 - t_1)] \\
t = 0 \text{ とおくと} \\
\ddot{y} + 2\epsilon \dot{y} + p^2 y &= \varphi[U(t) \sin t \\
& + U(t - t_1) \sin(t - t_1)]
\end{aligned}$$

この像関数は

$$\begin{aligned}
L[U] &= \frac{(s + 2\epsilon + 1) \cdot F(0)}{s^2 + 2\epsilon s + p^2} \\
& + \frac{F'(0)}{s^2 + 2\epsilon s + p^2} + \frac{\varphi(1 + e^{-t_1 s})}{(s^2 + 2\epsilon s + p^2)(s + 1)} \\
& = \frac{(s + 2\epsilon + 1)F(0)}{s^2 + 2\epsilon s + p^2} + \frac{F'(0)}{s^2 + 2\epsilon s + p^2} \\
& + \varphi \left[ \frac{-2\epsilon}{(p^2 - 1)^2 + 4\epsilon^2} \cdot \frac{s}{s^2 + 1} \right. \\
& + \frac{p^2 - 1}{(p^2 - 1)^2 + 4\epsilon^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2\epsilon}{(p^2 - 1)^2 + 4\epsilon^2} \\
& \cdot \frac{s}{s^2 + 2\epsilon s + p^2} + \frac{4\epsilon^2 - (p^2 - 1)}{(p^2 - 1)^2 + 4\epsilon^2} \\
& \cdot \frac{1}{s^2 + 2\epsilon s + p^2} \Big] \cdot \left[ 1 + e^{-t_1 s} \right]
\end{aligned}$$

$$\therefore y = L^{-1}L[U]$$

$$\begin{aligned}
& = \left\{ e^{-\epsilon t} \cos \sqrt{p^2 - \epsilon^2} + \frac{(1 + \epsilon)}{\sqrt{p^2 - \epsilon^2}} e^{-\epsilon t} \right. \\
& \quad \left. \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cdot t \right\} F(0) \\
& + F'(0) \frac{1}{\sqrt{p^2 - \epsilon^2}} e^{-\epsilon t} \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cdot t \\
& + \varphi \left[ \left( -\frac{2\epsilon}{(p^2 - 1)^2 + 4\epsilon^2} \right) \{ U(t) \cos t \right. \right. \\
& \quad \left. + U(t - t_1) \cos(t - t_1) \} \right. \\
& \quad \left. + \frac{p^2 - 1}{(p^2 - 1)^2 + 4\epsilon^2} \{ U(t) \sin t \right. \\
& \quad \left. + U(t - t_1) \sin(t - t_1) \} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2\epsilon}{(p^2 - 1)^2 + 4\epsilon^2} \{ U(t) e^{-\epsilon t} \cos \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cdot t \right. \\
& \quad \left. - U(t) \frac{\epsilon}{\sqrt{p^2 - \epsilon^2}} e^{-\epsilon t} \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cdot t \right. \\
& \quad \left. + U(t - t_0) e^{-\epsilon(t - t_1)} \cos \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \right. \\
& \quad \cdot (t - t_1) - U(t - t_1) \frac{\epsilon}{\sqrt{p^2 - \epsilon^2}} e^{-\epsilon(t - t_1)} \\
& \quad \left. \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cdot t \right\} + \frac{4\epsilon^2 - (p^2 - 1)}{(p^2 - 1)^2 + 4\epsilon^2} \\
& \quad \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 - \epsilon^2}} \left\{ U(t) e^{-\epsilon t} \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} \cdot t \right. \\
& \quad \left. + U(t - t_1) e^{-\epsilon(t - t_1)} \sin \sqrt{p^2 - \epsilon^2} (t - t_1) \right\}
\end{aligned}$$

となり、 $F(0)$ 、 $F'(0)$ は前の値と同一である。

#### 4 実験方法および結果

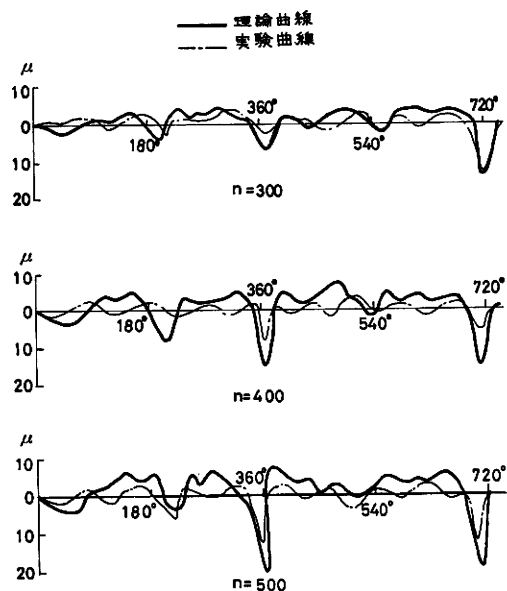
この実験においては、カムの回転数、 $r.p.m = 300$ , 400, 500 の場合について各回転に対する振幅を求めた。理論曲線を求めるにあたり、前研究報告第15巻第1号の第3図の機構を用い、相当質量として  $2.1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$  として、カムの表面を切削し高さ  $1 \text{ mm}$  の鋸歯としたが、衝撃を測定する場合、巾  $2 \text{ mm}$ 、メイン・カムとサブ・カムの2個を使用しているため、対応する位置に正確に同一の大きさのキズをつけることは困難であった。ペン書きオシロを使用したため、ペンの慣性力のため入力どおりの波形を得ることは困難のように思われた。

振動波形は、カムのドエル部分以外の実験曲線は、理論曲線とほとんど一致している。この不一致の理由は理論式において自由振動の項を無視したこと、主軸の振れを無視したこと等によるものと思われる。

実験結果と鋸歯ステップ関数を与えた場合の理論式と比較したが、その他のステップ関数を与えた場合に



においても、ほぼ同じような結果となることを認めた。



図—6 各回転数における鋸刃ステップの理論値と実験値との比較

## 結 言

カムの回転が、毎分  $n = 300$  において、理論曲線と実験曲線と比較すると、その振動の振幅はほぼ一致するが、回転数が増加するとその度合いは減じ、 $n = 500$  においては相当の差がある。これはペンの追従性が理想的でないことによるものと考えられる。高速度になるにつれて、過渡現象による振幅の大きさはきわめて大きくあられ、 $n = 500$  においてはその値は  $30\mu$  に達した。しかし、突部の幅に対する影響は極めて少ないことを示した。

## 文 献

- 1) R. Plunkett : Colloquim on Mechanical Impedance Methodes for Mechanical Vibrations (1958) The American Society Engineers
- 2) J. D. Robson : An Introduction Randum Vibrations (1964) Elsevier Publishing co,
- 3) Harold A. Rothbart : CAMS (1956) John Wiley & Sons, Inc.
- 4) Transaction of the ASME E Journal of Applied Mechanics Vol, 26 (1959)
- 5) Charles E. Crede : Vibration and Shock Isolation (1951) John Wiley & Sons, Inc.

(昭和42年10月9日受理)